Física 1

Movimiento Oscilatorio Armónico
(edición 2005)

Autora:
Elisa La Forgia

Colaboraron:
Claudia Sarris, Horacio Cassia

Confección: Horacio Cassia

sugerencias: física@cedi.frba.utn.edu.ar

MOVIMIENTO OSCILATORIO ARMONICO

I – Movimiento Oscilatorio Armónico Simple

1.-Introducción

En este capítulo estudiaremos el movimiento que realiza una masa de pequeñas dimensiones unida al extremo libre de un resorte, el cual tiene su otro extremo fijo a un soporte. Consideraremos que dicha masa puede moverse sobre una superficie horizontal, efectuando, para el presente análisis, algunas hipótesis simplificadoras:

1- el resorte tiene masa despreciable.

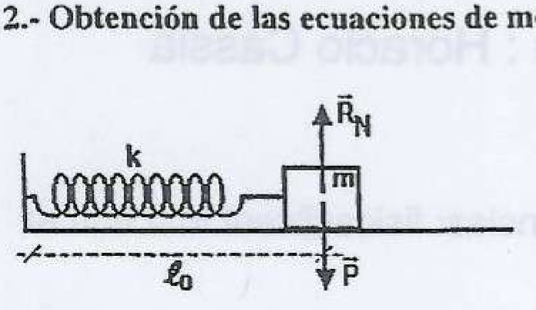
2- el rozamiento entre dicha masa y la superficie puede considerarse despreciable.

3- la fuerza viscosa del medio también puede considerarse despreciable.

Estamos interesados en describir el movimiento de la masa cuando el resorte se ha deformado bajo la acción de una fuerza exterior que lo estira o lo comprime, y que luego deja de actuar, dejando que el sistema se mueva libremente.

Supongamos en este análisis cualitativo que el resorte se ha estirado; sabemos que en este caso actuará sobre la masa del extremo una fuerza elástica restitutiva, proporcional a la deformación. Esta fuerza hace que la masa tienda a volver a la posición de equilibrio, pero debido a la velocidad que tiene al pasar por la misma, continua su movimiento, hasta alcanzar una posición simétrica de la inicial (con deformación); en esta posición la fuerza elástica será de igual valor que la inicial pero de sentido contrario, lo que hace que el movimiento se repita en forma periódica.

2.- Obtención de las ecuaciones de movimiento

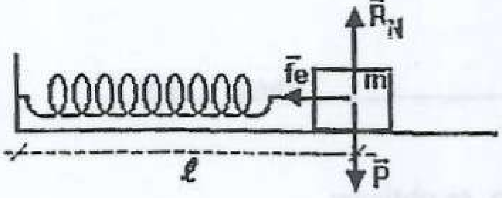


De acuerdo a las leyes de la Dinámica, en un análisis exhaustivo, cuando no presenta deformación será:

$$\sum \vec{f}_i = \vec{P} + \vec{R}_N = 0 \qquad [1]$$

Si el resorte se estira hasta alcanzar una longitud l, además de las fuerzas anteriores, se tendrá una fuerza horizontal :

$$\vec{f}_e = -k\,(\vec{l} - \vec{l}_0) \qquad [2]$$



que podremos escribir como:

$$\vec{f}_e = -k\,\vec{x} \qquad [3]$$

con $x = \vec{l} - \vec{l}_0$ dirigida hacia la posición de equilibrio. En este caso se tendrá:

$$\sum \vec{f}_i = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_e = m\,\vec{a} \qquad [4]$$

que se reduce a la componente horizontal :

$$-k\,x = m\,a \qquad [5]$$

teniendo en cuenta que: $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad [6]$$

se obtendrá la ecuación: $$-k\,x = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad [7]$$

que puede escribirse también como: $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-k}{m}x \qquad [8]$$

Esta es una ecuación diferencial de 2do .orden homogénea. Resolviendo la misma se obtendrá $x = x(t)$, que es la ecuación horaria de este movimiento.

La Matemática enseña a resolver este tipo de ecuaciones; pero teniendo en cuenta que esta herramienta no se adquiere en el curso de primer año, trataremos de encarar la solución de dicha ecuación de una manera más simple, y quizás algo intuitiva. De la expresión [8] podemos interpretar que la solución x buscada debe coincidir con la expresión de su derivada segunda y de signo opuesto a la misma, pudiendo estar multiplicada por una constante, que en este caso es k/m.

Las funciones que presentan estas características son las funciones armónicas seno y coseno. Por lo tanto, podemos inferir que la solución debe ser alguna de estas funciones. Para verificarlo, veremos si se cumple la relación [8]. Proponemos la solución:

$$x(t) = \cos t \qquad [9]$$

Pero como el argumento de la función armónica debe ser adimensional, el tiempo deberá estar multiplicado por una constante, que por ahora llamaremos α, y que tendrá dimensiones de $[t]^{-1}$ por otro lado, teniendo en cuenta que x representa una elongación, y que ésta puede tomar cualquier valor, deberá generalizarse esta función escribiendo:

$$x(t) = A\cos(\alpha\,t) \qquad [10]$$

Calculando la derivada segunda de esta función respecto del tiempo, se obtiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2(A\cos(\alpha t))}{dt^2} = -\alpha^2 A\cos(\alpha t) \qquad [11]$$

y reemplazando en [8], se tiene:

$$-\alpha^2 A\cos(\alpha t) + \frac{k}{m}A\cos(\alpha t) = 0 \qquad [12]$$

Esto puede escribirse:

$$A\cos(\alpha t)\left[-\alpha^2 + \frac{k}{m}\right] = 0 \qquad [13]$$

Para que esta igualdad se cumpla para todo valor de t, debe ser : $\alpha^2 = \frac{k}{m}$

o bien: $$\alpha = +\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad [14]$$

Dimensionalmente puede verificarse que:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg\ m}{s^2 m\ kg}} = s^{-1} \qquad [15]$$

a esta constante *k/m* la llamaremos pulsación y la indicaremos con el símbolo ω.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad [16]$$

Por lo tanto podemos adoptar como ecuación horaria :

$$x(t) = A\cos(\omega t) \qquad [17]$$

donde A representa el valor máximo de la elongación y la llamaremos amplitud, es decir el objeto que realiza el MOA va a oscilar entre –A y A.

Pero, con esta expresión, el valor de x para $t = 0$, será $x(t=0) = A$ siempre. Sin embargo, si quisiéramos considerar otras situaciones iniciales, como la de un resorte inicialmente comprimido, o si queremos empezar a contar el tiempo cuando pasa por la posición de equilibrio, la expresión anterior no lo permitiría. Esto también puede resolverse, adoptando como solución la expresión más general:

$$x(t) = A \cos (\omega t + \varphi) \qquad [18]$$

siendo:

fase instantánea $\varphi(t) = wt + \varphi$

fase inicial del movimiento : φ

Teniendo en cuenta que la velocidad es:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

será: $v(t) = -\omega A\, sen(\omega t + \varphi)$ [19]

o lo que es lo es equivalente:

$v(t) = -v_{max}\, sen(\omega t + \varphi)$

donde $v_{max} = \omega A$ es el módulo de la máxima velocidad que alcanza el objeto.

De la misma forma la aceleración será:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Con lo que: $a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$ [20]

o lo que es lo es equivalente:

$a(t) = -a_{max} \cos(\omega t + \varphi)$

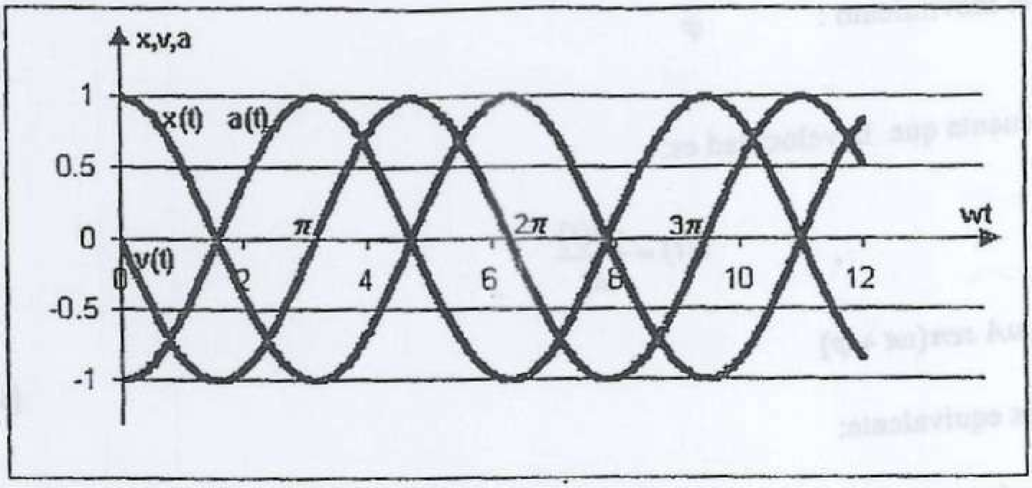
donde $a_{max} = \omega^2 A$ es el módulo de la máxima aceleración que alcanza el objeto.

Si consideramos $\varphi = 0$, $\omega = 1$ y $A = 1$ podemos representar las tres funciones, posición, velocidad y aceleración en un mismo gráfico. En este caso, dichas expresiones toman la forma:

$$x(t) = A \cos (\omega t) = \cos t \qquad [21]$$

$$v(t) = -\omega A\, sen(\omega t) = -sen\, t \qquad [22]$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t) = -\cos t \qquad [23]$$



Ejemplo 1:

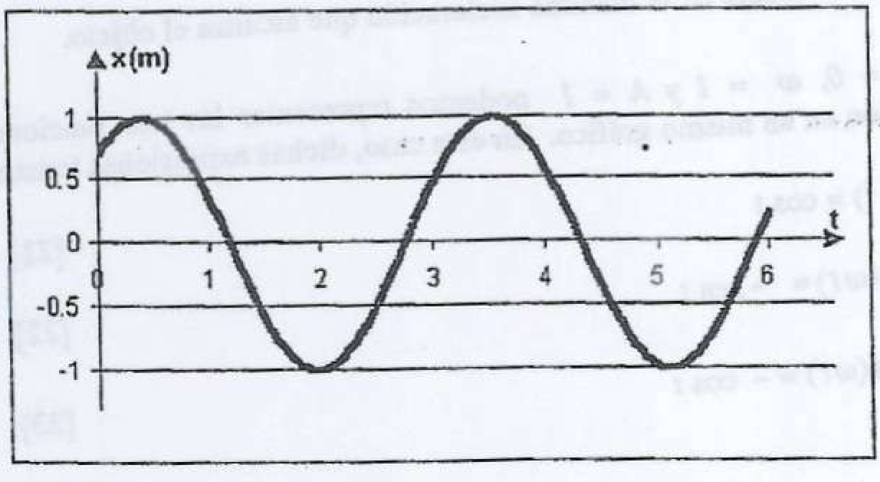
Sea la ecuación de movimiento de un punto material que realiza un Movimiento Oscilatorio Armónico Simple (MOAS): $x(t) = 1m\ \cos\left(2s^{-1}t - \frac{\pi}{4}\right)$

Expresar la amplitud, la fase inicial y la fase en función del tiempo. Graficar x = x(t)

En este caso:

A = 1 m ; $\varphi(t) = 2s^{-1}t - \frac{\pi}{4}$ y $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

La representación gráfica de la función anterior $x = x(t)$, será:

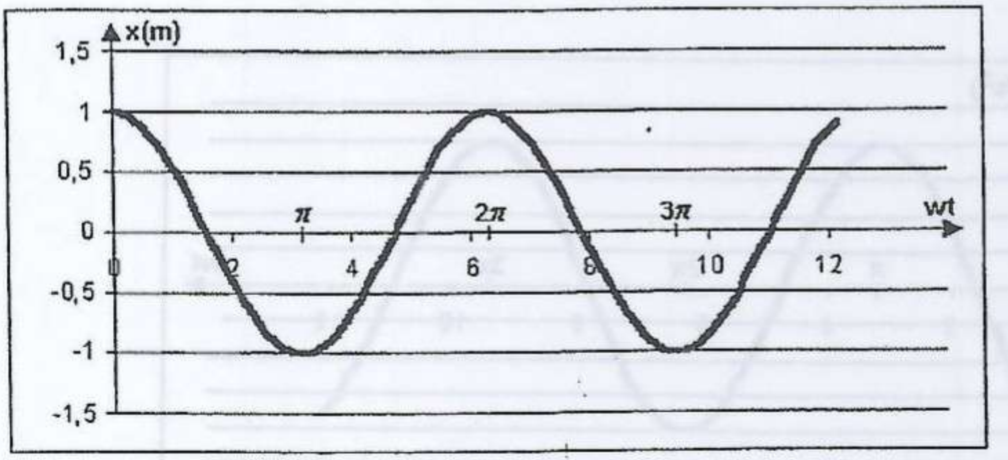


Ejemplo 2:

Sea la ecuación de movimiento de un punto material que realiza un Movimiento Armónico Simple: $x(t) = 1m \cos 2s^{-1}t$

Graficar la posición, velocidad y aceleración en función de la fase.

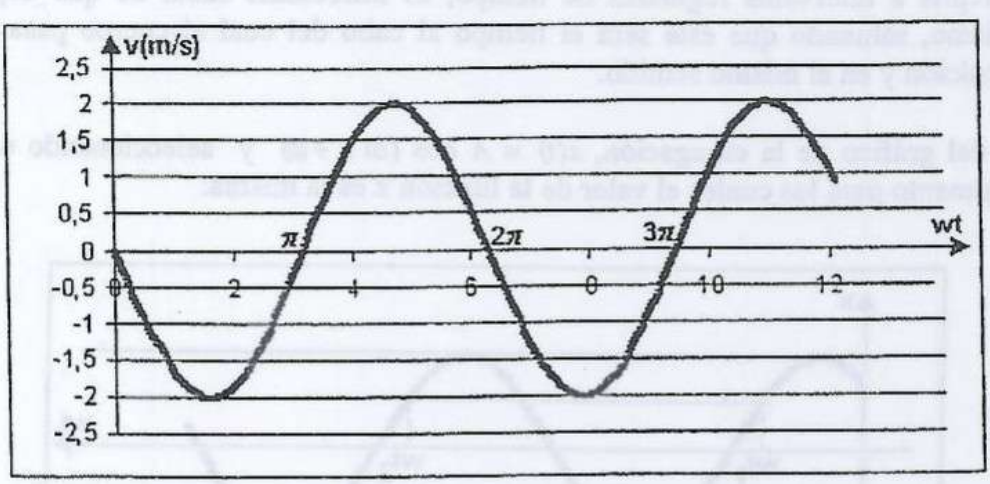
La posición en función de la fase wt será:



Teniendo en cuenta que la velocidad es de [19] :

$$v(t) = -\omega A\, sen(\omega t + \varphi)$$

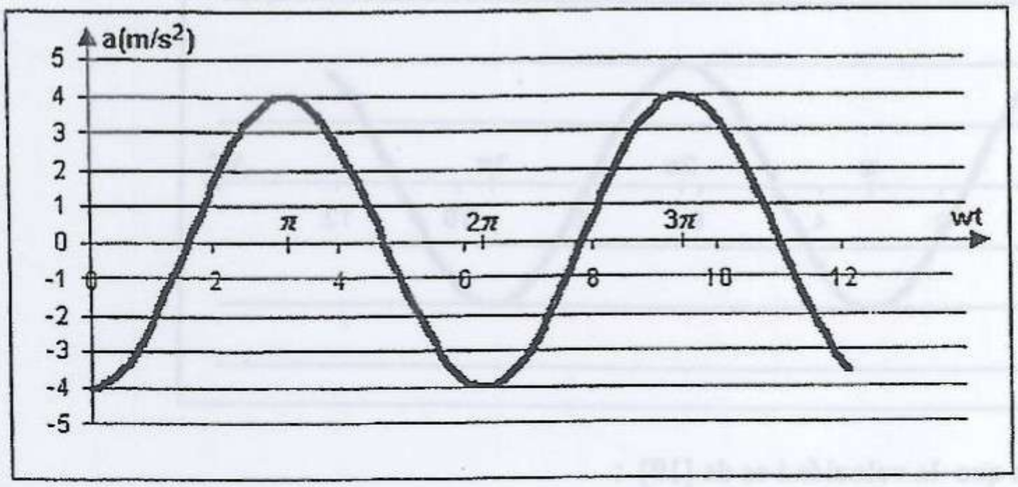
Para nuestro ejemplo: $v(t) = -2\,(m/s)\, sen\left(2s^{-1}t\right)$



De la misma forma la aceleración será de [20]:

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

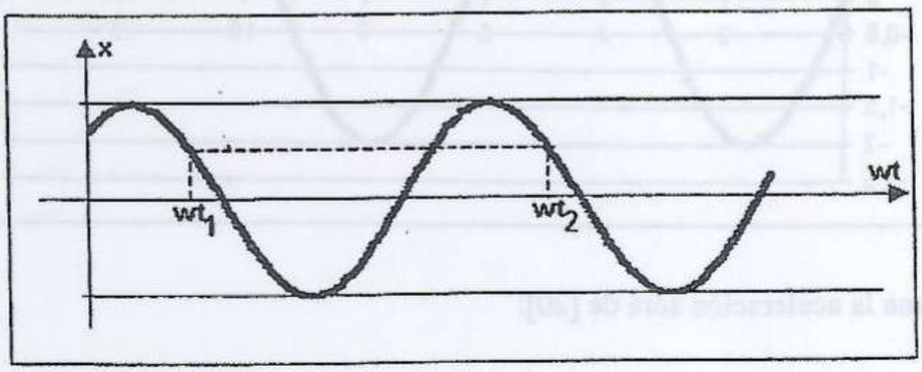
Para nuestro ejemplo: $a(t) = -4\ (m/s^2)\ sen\left(2s^{-1}t\right)$



3.- Expresión del período T del movimiento oscilatorio armónico

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, de que se trata de un movimiento periódico, es decir, que se repite a intervalos regulares de tiempo, es interesante saber de qué depende el período del mismo, sabiendo que éste será el tiempo al cabo del cual el cuerpo pasa por una determinada posición y en el mismo sentido.

A partir del gráfico de la elongación, $x(t) = A\ cos\ (\omega\ t + \varphi)$ y seleccionando un par de valores del argumento para los cuales el valor de la función x es la misma:



Para los instantes t_1 y t_2 se cumple que: $x(t_1) = x\ (t_2)$, o sea:

$$A\ cos\ (\omega\ t_1 + \varphi) = A\ cos\ (\omega\ t_2 + \varphi.)$$

siendo $t_1 \neq t_2$ deberá ser: $\omega\ t_2 + \varphi = \omega\ t_1 + \varphi + 2\pi$

luego $$\omega (t_2 - t_1) = 2\pi$$

es decir: $$\omega T = 2\pi$$

será por lo tanto: $$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad [24]$$

y recordando el significado de ω, resulta:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad [25]$$

Se observa que el período T sólo depende de la masa unida al resorte y de la constante elástica del mismo, pero no depende de la amplitud del movimiento.

Ejemplo 3:

A un resorte vertical fijo de un extremo, se le cuelga una masa de 2 kg y se estira 4 cm. Luego se aparta dicha masa del equilibrio 5 cm y se lo deja oscilar. Hallar la máxima velocidad que alcanza dicha masa:

Primero calculamos la constante del resorte,

Como la fuerza aplicada al resorte es el peso del cuerpo, entonces:

$$F = k\,x = P = m\,g$$

Luego:

$$k = \frac{m\,g}{x} = 500\,\frac{N}{m}$$

Luego el período de este resorte será:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,4 seg$$

Y su pulsación:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 15,7\ seg$$

Entonces, de la expresión de velocidad máxima es:

$$v_{max} = \omega A = 15,7 s^{-1}\ 5\,cm = 78,5\ cm$$

4.- Determinación de la amplitud A y de la fase inicial del movimiento

Teniendo en cuenta las expresiones vistas:

$$x(t) = A \cos (\omega t + \varphi)$$

y $$v(t) = -\omega A\, sen(\omega t + \varphi),$$

las expresiones de dichas magnitudes para $t = 0$, serán:

$$x(t=0) = x_0 = A \cos \varphi \qquad [26]$$

y $$v(t=0) = v_0 = -\omega A\, sen\varphi$$

o bien $$-\frac{v_0}{\omega} = A\, sen\varphi \qquad [27]$$

Sumando miembro a miembro los cuadrados de las expresiones [26] y [27], se puede obtener:

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 \left(\cos^2 \varphi + sen^2\varphi\right)$$

y por lo tanto, será:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad [28]$$

Y haciendo el cociente de ambas expresiones [26] y [27] se obtendrá :

$$tg\varphi = -\frac{v_0}{w x_0} \qquad [29]$$

Con lo que puede observarse que las constantes A y φ dependen de las condiciones iniciales de posición y velocidad.

Nota: es importante tener presente que si la función propuesta como solución de la ecuación diferencial, hubiera sido $x(t) = A\, sen\, (\omega t + \varphi)$, se podría haber verificado la validez de la misma, siguiendo los pasos seguidos con la función anterior; sólo se tendrá una expresión distinta para el valor de la fase inicial.

Ejemplo 4:

Un cuerpo realiza un movimiento armónico simple con un período de 0,1π segundos. Si en el instante inicial su elongación es de 8 cm y su velocidad es de 3 m/s, obtener la ecuación x = x(t).

Dado que el período es $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ entonces $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 20\ s^{-1}$

Entonces su amplitud será: $A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} = 17\ cm$

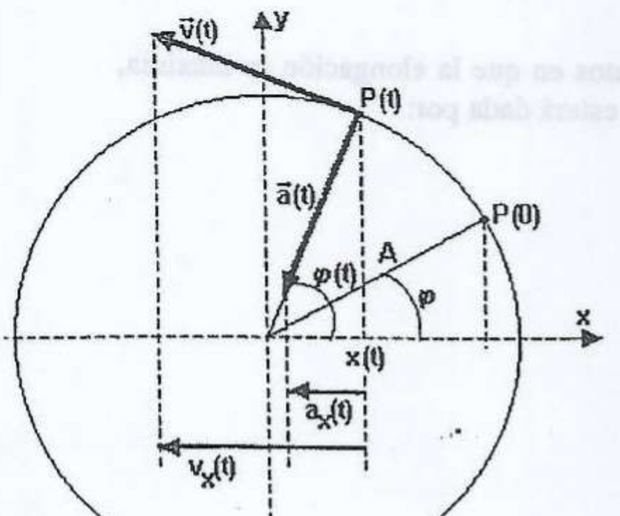
Luego la fase inicial $tg\varphi = -\dfrac{v_0}{w\, x_0} = -1{,}875$

Que corresponde a una fase inicial de: $-61{,}9°$

Entonces:

$$x(t) = 17cm/s\ \cos\left(20s^{-1}t - 61{,}9°\right)$$

5.- Relación entre el movimiento circular uniforme y un movimiento oscilatorio armónico



Si consideramos el movimiento de un punto material que recorre una circunferencia de radio A, por ejemplo, en sentido antihorario, partiendo de una posición Po, en la que el radio forma un ángulo φ con el eje x, su proyección sobre el mismo eje será:

$$x_0 = A \cos \varphi \qquad [30]$$

Cuando el punto se encuentra en otra posición P(t), para la cual el radio ha barrido el ángulo ω t a partir de la posición inicial, su proyección en este caso será:

$$x(t) = A \cos (\omega t + \varphi) \qquad [31]$$

Que es la misma expresión que corresponde a un M.O.A. Si hubiéramos considerado la proyección sobre el eje y, análogamente, se habría obtenido: $y(t) = A\ sen\ (\omega t + \varphi)$, que también corresponde a un M.O.A.

Es decir, que mientras el punto material recorre la circunferencia con un movimiento circular uniforme, su proyección ya sea sobre el eje x o sobre el eje y, varía su posición de manera similar a como lo hace la masa unida al extremo del resorte.

Si proyectamos el vector velocidad sobre el eje x, tendremos la expresión de la velocidad en un M.O.A. sabiendo que la velocidad en el MCU es $A\omega$.

$$v_x(t) = -\omega A \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\omega t + \varphi)\right)$$

$$v_x(t) = -\omega A \, sen(\omega t + \varphi) \qquad [32]$$

De la misma manera con la aceleración, sabiendo que la aceleración centrípeta es $A\omega^2$:

$$a_x(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \qquad [33]$$

6.- Energía del movimiento armónico simple

Teniendo en cuenta que el punto material, salvo en los puntos en que la elongación es máxima, tiene velocidad distinta de cero, tendrá energía cinética, que estará dada por:

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

y siendo $v(t) = -A\omega \, sen\,(\omega t + \varphi)$

resulta: $$E_C = \frac{1}{2} m A^2 sen^2(\omega t + \varphi)$$

[34]

Además, por estar la masa unida al resorte, estará sometido a una fuerza restitutiva:

$$f_e = -k\,x$$

que como sabemos es una fuerza conservativa, por lo tanto, tendrá también una energía potencial elástica dada por:

$$E_P = \frac{1}{2} k x^2$$

y siendo $x(t) = A \, sen\,(\omega t + \varphi)$

resultará:
$$E_P = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \qquad [35]$$

Por lo tanto, su energía mecánica: $E_M = E_C + E_P$

Combinando [34] y [35] será:
$$E_M = \frac{1}{2} m A^2 sen^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

que se puede escribir:
$$E_M = \frac{1}{2} A^2 \left[m\, sen^2(\omega t + \varphi) + k \cos^2(\omega t + \varphi) \right]$$

y recordando que:
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

será:
$$k = m\omega^2$$

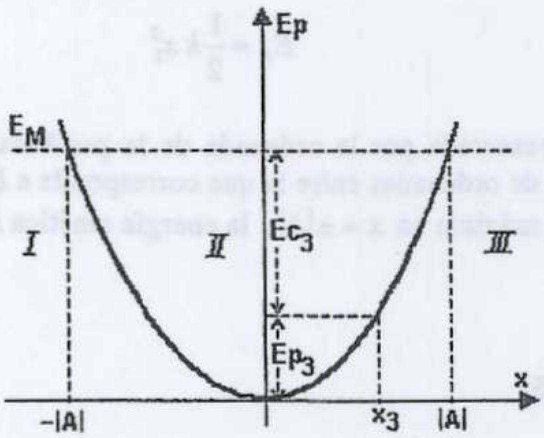
por lo tanto, resultará:
$$E_M = \frac{1}{2} k A^2 \left[sen^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) \right]$$

que dará finalmente:
$$E_M = \frac{1}{2} k A^2 \qquad [36]$$

Por lo tanto, la energía mecánica será constante para cualquier posición del punto material y para cualquier valor de t, siempre que no exista ningún tipo de fuerzas disipativas.

Si representamos la energía potencial elástica en función de x,
$$E_P = \frac{1}{2} k x^2$$

se obtendrá una parábola como muestra la figura.



Siendo $E_M = \frac{1}{2} k A^2 = \text{cte}$

ésta estará representada por la recta paralela al eje de abscisas x, de ordenadas:
$$y = \frac{1}{2} k A^2$$

Esta última recta corta a la parábola en dos puntos, correspondientes a las abscisas

$$x_1 = -|A| \text{ y } x_2 = +|A| .$$

En dichos puntos será $$E_P = \frac{1}{2} k A^2$$

y por lo tanto resulta $E_M = E_P$ y será por lo tanto $E_c = 0$.

Esta recta de $E_M = cte$ también separa el semiplano superior en tres zonas:

Zona I: con $x < -|A|$

Zona III: con $x > +|A|$

En estas dos zonas sería $E_P > E_M$, lo que daría lugar a que $E_C < 0$, y por lo tanto la velocidad del punto material sería imaginaria. Clásicamente esto no es posible, y por lo tanto consideraremos dichas zonas I y III como zonas prohibidas; concretamente, no podríamos encontrar nunca el punto material en algun punto de dichas zonas.

Zona II: con $-|A| < x < +|A|$

En cualquiera de los puntos correspondientes a dicho intervalo será $E_P < E_M$, y por lo tanto será $E_C > 0$; la velocidad tendrá valores reales, y por lo tanto esta será la zona permitida para la partícula durante su movimiento. Puede observarse también que para un punto x_1 de este intervalo, la energía potencial

$$E_P = \frac{1}{2} k x_1^2$$

estará representada por la ordenada de la parábola correspondiente a este punto y la E_C por la diferencia de ordenadas entre la que corresponde a E_M y la anterior. Puede verse que E_P es nula en $x = 0$ y es máxima en $x = \pm|A|$; la energía cinética E_C es máxima en $x = 0$ y es nula en los puntos extremos.

Ejemplo 5:

Una masa de 200 gramos unida a un resorte de constante elástica k = 20 N/m oscila con una amplitud de 5 cm sobre una superficie horizontal sin rozamiento.

a) Calcular la energía total del sistema y la velocidad máxima de la masa.

b) Hallar la energía cinética y potencial elástica del sistema cuando la elongación sea igual a 3 cm

c) Hallar la velocidad de la masa para el caso anterior.

a) De [36] la energía mecánica total del sistema coincide con la energía potencial en la amplitud máxima.

$$E_P = E_M = \frac{1}{2} k\, A^2 = 0{,}5\; 20\; 0{,}05^2\; J = 0{,}025\, J$$

Cuando la Ep es nula es máxima la energía cinética:

$$E_M = E_C = \frac{1}{2} m\, v_{max}^2 = 0{,}025\, J$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 0{,}5\, \frac{m}{s}$$

b) $E_P = \frac{1}{2} k\, x^2 = 0{,}5\; 20\; 0{,}03^2\; J = 0{,}009\, J$

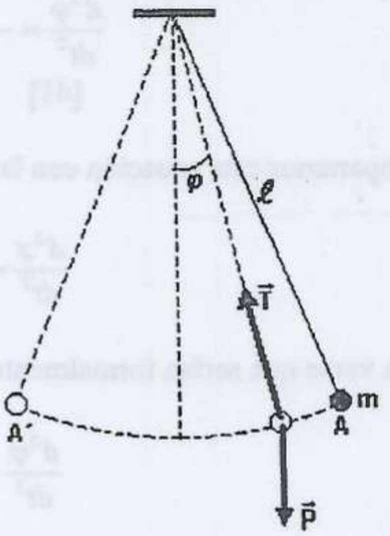
$$E_C = E - E_P = 0{,}025\, J - 0{,}09\, J = 0{,}016\, J$$

c) $E_C = \frac{1}{2} m\, v^2 = 0{,}016\, J$ luego:

$$v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}} = 0{,}4\, \frac{m}{s}$$

7.- Péndulo simple

Otro caso importante de movimiento oscilatorio, es el que describe una masa de pequeñas dimensiones que está unida a un extremo de un hilo inextensible y de masa despreciable, el que a su vez tiene su otro extremo fijo. Este sistema es conocido como péndulo simple, y realiza, cuando se lo separa de la posición de equilibrio, un movimiento periódico sobre una trayectoria que es un arco de circunferencia en un plano vertical, entre los puntos A y A'.



La ecuación de movimiento para la partícula, teniendo en cuenta que las fuerzas que actúan sobre la misma son P (peso) y T (tensión en la cuerda), será:

$$\sum \vec{f}_i = \vec{P} + \vec{T} = m\, \vec{a} \qquad [37]$$

En este caso conviene descomponer dicha ecuación en sus componentes radial y tangencial.

En dirección radial, y considerando como positivo el sentido hacia el centro (punto fijo), será:

$$T - m\,g\,\cos\varphi = m\frac{v^2}{l} \qquad [38]$$

De esta ecuación puede obtenerse la tensión T, que será:

$$T = m\,g\,\cos\varphi + m\frac{v^2}{l}$$

Puede observarse que la tensión es máxima cuando el hilo pasa por la vertical, pues en dicha posición ambos términos del 2do. miembro alcanzan su máximo valor.

Para la componente tangencial, será:

$$-m\,g\,sen\varphi = m\,a_\tau \qquad [39]$$

a partir de la relación que se verifica en una circunferencia : $s = l\,\varphi$, será:

$$a_\tau = l\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad [40]$$

resultando la ecuación:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,sen\,\varphi \qquad [41]$$

si comparamos esta ecuación con la del sistema masa-resorte:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

puede verse que serían formalmente iguales si la expresión [41] fuese de la forma

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi \qquad [42]$$

Este reemplazo puede efectuarse si $sen\ \varphi \cong \varphi$, lo que se cumple si los ángulos son pequeños (pequeñas oscilaciones).

Si nos limitamos a estos casos, puede decirse que la solución de [42] será formalmente similar a la del resorte, Por lo tanto, podemos escribir:

$$\varphi(t) = \varphi_o\,cos\,(\omega\,t + \varphi) \qquad \text{con} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad [43]$$

Y siendo el período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ resultará en este caso que:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad [44]$$

Expresión válida sólo para amplitudes pequeñas.

Ejemplo 6:

Dado un péndulo simple,
a) Calcular la longitud de un péndulo cuyo período es de 2 segundos?
b) ¿Cuál sería su período en la Luna donde la gravedad es 1,62 m/s^2?

a) De la expresión (44) despejamos l,

$$l = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 9,8\left(\frac{2}{2.3,1416}\right)^2 = 0,99\,m$$

b) Si realizamos el cociente entre el período de la Tierra y de la luna resulta:

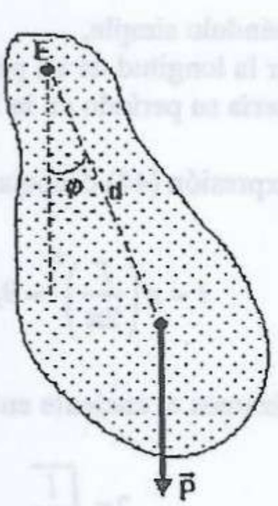
$$\frac{T_L}{T_T} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_L}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_T}}} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = \sqrt{\frac{9,8}{1,62}} = 2,46$$

Luego: $T_L = T_T.2,46 = 2$ s . 2,46 = 4,92 segundos

8.- Péndulo físico

Se conoce con este nombre a un cuerpo extenso cualquiera que puede oscilar alrededor de un eje vertical que no pasa por su baricentro. Cuando se separa dicho cuerpo de la posición en que el baricentro pertenece a la vertical que pasa por el punto de suspensión, éste va a tender a volver a la posición de equilibrio, moviéndose entre posiciones que, si se puede despreciar todo tipo de rozamiento, pueden considerarse simétricas.

Este movimiento, puede describirse como una rotación pura alrededor del eje de suspensión E, siendo la ecuación característica:



$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{fiE} = I_E\,\vec{\gamma} \qquad [45]$$

donde el 1er. miembro es la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan, respecto del eje de suspensión, I_E es el momento de inercia del péndulo respecto del mismo punto, y γ es la aceleración angular. Teniendo en cuenta que las fuerzas que actúan son el peso P y la reacción en el soporte, se puede ver que el único momento no nulo será el del peso. Luego será:

$$-m\,g\,d\;sen\theta = I_E\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

debe tenerse en cuenta que el momento del peso, es de tipo restitutivo, y por eso su signo negativo. Esta ecuación puede escribirse:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{m\,g\,d}{I_E}\,sen\,\varphi \qquad [46]$$

que resulta, como en el caso del péndulo simple, formalmente igual a la del resorte oscilante, si se consideran amplitudes pequeñas, es decir, si resulta válida la sustitución

$$sen\;\varphi \cong \varphi \qquad [47]$$

En este caso, la ecuación de movimiento, se puede obtener por similitud con la anterior, resultando entonces:

$$\varphi\,(\mathrm{t}) = \varphi_0 \cos\,(\omega\,\mathrm{t} + \varphi) \qquad [48]$$

con $$\omega = \sqrt{\frac{m\,g\,d}{I_E}}$$

y por lo tanto su período será:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_E}{m\,g\,d}} \qquad [49]$$

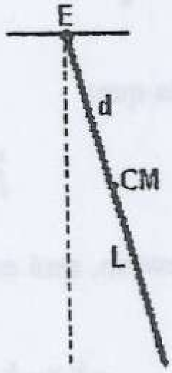
La expresión del péndulo simple puede ser obtenida a partir de ésta. Para ello consideremos el momento de inercia I_E de una partícula respecto respecto de su eje de suspensión, situado a una distancia $d = l$; entonces $I_E = m\,l^2$ y así obtendremos la expresión [44]

Ejemplo 7:

Un péndulo físico consiste en una varilla de longitud L = 90 cm y masa m, que oscila suspendida de uno de sus extremos. Hallar
a) el período del mismo
b) El período, si ahora se lo suspende desde un punto situado a L/5 por debajo del punto anterior.

a) El momento de inercia de la barra respecto del eje E se calcula por el Teorema de Steiner:

$$I_E = I_G + m\,d^2 = \frac{1}{12} m\,L^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m\,L^2$$

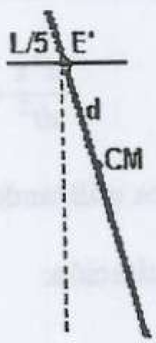


Aplicando la expresión (49)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_E}{m\,g\,d}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m\,L^2}{m\,g\,\frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\,L}{3\,g}} = 1{,}39\,s$$

b) Si se cambia el punto de suspensión la distancia d será de:

$$d = \frac{L}{2} - \frac{L}{5} = 0{,}3L$$



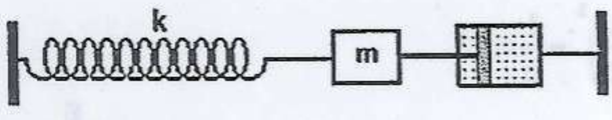
$$I_E = I_G + m\,d^2 = \frac{1}{12} m\,L^2 + m\,(0{,}3L)^2 = 0{,}163\,m\,L^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_E}{m\,g\,d}} = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}163\,m\,L^2}{m\,g\;0{,}3L}} = 1{,}39\,s$$

II - Movimiento Oscilatorio Amortiguado

En los casos tratados anteriormente, se supuso despreciable todo tipo de rozamiento; de esta manera, las amplitudes resultan constantes, y teóricamente el sistema oscilante, se movería indefinidamente sin reducir la amplitud.

En la realidad, sabemos que esto no ocurre, pues además de las fuerzas consideradas estarán presentes fuerzas viscosas o que dan lugar a otro tipo de interacciones de rozamiento. Analizaremos cómo se modifican las expresiones anteriores si consideramos, en el caso del sistema masa-resorte la acción de una fuerza viscosa que puede ser producida por el aire u otro fluido en el cual se encuentra el sistema (representado en la figura por un émbolo lleno de un líquido viscoso).



Teniendo en cuenta que:

$$\vec{f}_v = -k_v \vec{v} \qquad [50]$$

la ecuación de Newton, será entonces para la componente horizontal:

$$-k\,x - k_v \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

resultando la ecuación diferencial :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_v}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad [51]$$

que resolveremos utilizando el método matemático correspondiente a este tipo de ecuaciones.

Haciendo la sustitución:

$$\frac{k_v}{m} = 2\delta$$

[52]

y recordando que $$\frac{k}{m} = \omega^2$$

resulta:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega^2 x=0 \qquad [53]$$

que es la ecuación diferencial del movimiento. Se trata de una ecuación de 2do. orden, homogénea y completa.

Se propone como solución la función:

$$x(t)=A\,e^{\alpha t} \qquad [54]$$

las derivadas lra. y 2da. de dicha función serán:

$$\frac{dx(t)}{dt}=\alpha A\,e^{\alpha t} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2}=\alpha^2 A\,e^{\alpha t}$$

y reemplazando en la ecuación diferencial, será:

$$\alpha^2 A e^{\alpha t}+2\delta\,\alpha A e^{\alpha t}+\omega^2 A\,e^{\alpha t}=0 \qquad [55]$$

o bien:

$$Ae^{\alpha t}\left(\alpha^2+2\delta\,\alpha+\omega^2\right)=0$$

que para que la igualdad a 0 sea válida siempre, debe ser:

$$\alpha^2+2\delta\,\alpha+\omega^2=0 \qquad [56]$$

es decir, debe resolverse la ecuación de 2do. grado en α , que será:

$$\alpha=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega^2} \qquad [57]$$

es decir, la solución propuesta será solución de la ecuación diferencial siempre que adopte los valores:

$$\alpha_1=-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2} \qquad [58]$$

$$\alpha_2=-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2} \qquad [59]$$

por lo que las soluciones válidas serán para estos casos:

$$x_1(t)=A_1\,e^{\alpha_1 t} \qquad \text{y} \qquad x_2(t)=A_2\,e^{\alpha_2 t} \qquad [60]$$

Pero si se tienen dos o más funciones que son soluciones de una ecuación diferencial, se puede demostrar que una combinación lineal de las mismas, también será solución. Por lo tanto, adoptaremos:

$$x(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \qquad [61]$$

Esto da lugar a distintos tipos de movimiento, dependiendo del valor del discriminante $\delta^2 - \omega^2$

Los casos que pueden presentarse son:

a) si $\delta = 0$, $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\omega^2}$ o sea $\alpha_{1,2} = \pm i\omega$

en este caso se obtienen raíces α_1 y α_2 que son conjugadas complejas, y será:

$$x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \qquad [62]$$

Para obtener una expresión más simple, puede hacerse la siguiente sustitución:

$$A_1 = B e^{i\varphi}$$

con B y φ constantes y

$$A_2 = B e^{-i\varphi}$$

y reemplazando:

$$x(t) = B e^{i(\omega t+\varphi)} + B e^{-i(\omega t+\varphi)} \qquad [63]$$

que dará como expresión final:

$$\boxed{x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)} \qquad [64]$$

Esta expresión es la que habíamos obtenido para el caso de un M.O.A. sin amortiguamiento, siguiendo, como se vio un camino más simple pero menos general.

Este último desarrollo corresponde al método matemático general para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales.

b) si $\delta^2 < \omega^2$, será $\sqrt{\delta^2 - \omega^2}$ imaginario, que puede escribirse como:

$$\sqrt{\delta^2 - \omega^2} = \sqrt{-(\omega^2 - \delta^2)} = i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

y haciendo

$$\sqrt{\omega^2 - \delta^2} = \omega' \qquad [65]$$

(ω' : pulsación del resorte amortiguado), las soluciones de la ecuación de 2do. grado serán:

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega$$

y la solución de la ecuación diferencial será:

$$x(t) = A_1 e^{(-\delta + i\omega)t} + A_2 e^{(-\delta - i\omega)t} \qquad [66]$$

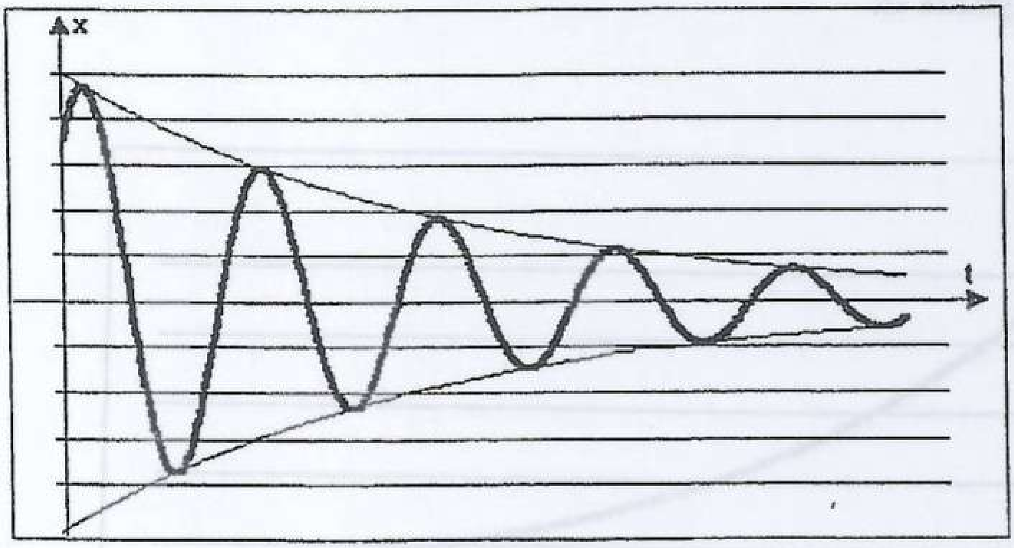
o bien:

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(A_1 e^{i\omega' t} + A_2 e^{-i\omega' t}\right) \qquad [67]$$

la expresión del paréntesis es similar a la del caso a), con el reemplazo de ω por ω'; por lo tanto, la misma puede escribirse también como $A \cos(\omega t + \varphi)$. Por lo tanto la solución será:

$$\boxed{x(t) = A e^{-\delta t}\cos(\omega' t + \varphi)}$$

La representación gráfica de esta ecuación horaria es de la forma:



Presenta como diferencia importante, respecto del caso sin amortiguamiento que la amplitud no es constante, sino que disminuye exponencialmente en el tiempo, siendo el factor exponencial con que decae la amplitud, dependiente de la constante viscosa del medio.

Es necesario tener en cuenta que no siendo constante la amplitud, no puede considerarse como período el tiempo al cabo del cual la elongación vuelve a ser máxima, pues un máximo de orden (n +1) es menor que el de orden n.

En este caso llamaremos pseudo período a : $T = \dfrac{2\pi}{\omega'}$ [68]

c) si $\delta = \omega$, será $\delta^2 - \omega^2 = 0$

luego las soluciones de la ecuación de 2do. grado serán iguales:

$$\alpha_{1,2} = -\delta$$

y por lo tanto la ecuación horaria será:

$$x(t) = A\,e^{-\delta\,t} \qquad [69]$$

que corresponde al movimiento amortiguado crítico; este movimiento no es oscilatorio; después de deformado el resorte, éste tiende a volver a la posición de equilibrio, sin alcanzarla totalmente.

La representación gráfica es:

d) si $\delta > \omega$, entonces $\sqrt{\delta^2 - \omega^2}$ es real

y las soluciones de la ecuación de 2do. grado serán:

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2} = -\delta \pm \delta\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\delta^2}}$$

y haciendo $\beta = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\delta^2}}$

$$\alpha_{1,2} = -\delta(1 \pm \beta)$$

y la ecuación horaria:

$$x(t) = \left(A_1\, e^{\delta \beta t} + A_2\, e^{-\delta \beta t}\right) e^{-\delta t} \qquad [70]$$

que da lugar a lo que se conoce como movimiento sobreamortiguado, que tampoco es oscilatorio; el resorte tiende a volver a la posición de equilibrio, pero más lentamente que en el caso c).